orgullosa que tota la seva família estava formada per xifres que eren potències de 2, el 42 se sobresaltà. Havia vist que per la porta hi començava a entrar una escletxa de llum... No! No podia haver passat tan ràpid...

– Què li passa? –preguntà sorpresa la 42.

– R..res... No és res i... important –quequejà atemorit el 42.

De sobte començà a sentir un dolor i es dividí entre 2. Va esdevenir el 21 i el residu de la divisió, 0, aparegué. Es va anar dividint successivament fins que tots els residus i l'últim quocient es van alinear i va tornar a ser l'101010. No quedava ni rastre del 42. Ella se'l va quedar mirant, bocabadada. No s'ho podia creure.

– Què has fet? Què ha passat? Ets un simple 101010?

Ell es va col·locar bé les xifres i es va escurar la gola. Tot el bar l'estava mirant. S'havia produït un canvi de base? No podia ser. L'101010 avançà cap al mig de la sala. Se sentia diferent. Ja no temia aquells nombres. Ja no creia que fossin superiors. Tot allò s'havia acabat.

– Sí, companys, jo soc en realitat un simple 101010. M'he passat la vida discriminat, insultat i repudiat pel simple fet que només estic format per uns i per zeros. Algun nombre d'aquesta sala em podria explicar per què la xifra 9 té més drets que la xifra 0? Per què considerem que unes xifres són superiors a d'altres? Per què ens segreguem nosaltres mateixos? No hi ha absolutament cap motiu que ho justifiqui, i és absurd que existeixin desigualtats entre nosaltres a causa del nostre aspecte. Tots som nombres, al cap i a la fi. Tots ens podem sumar, multiplicar i restar independentment de qui siguem. Les matemàtiques avançarien molt més ràpidament si deixéssim que tothom participés en el nostre progrés, en comptes de deixar de banda aquells que són diferents. Com podem ser capaços d'enfosquir un coneixement tan bell? Per què ens entestem a perdre el temps fent lleis i proclamacions per anul·lar la felicitat d'altres nombres amb l'únic motiu de creure'ns superiors? Espero que el canvi de base que acabeu de veure vosaltres mateixos serveixi perquè us adoneu de com n'és de supèrflua l'aparença de les vostres xifres.

Aleshores dirigí la mirada cap a la 42 i afegí:

– I desitjo que, en un futur proper, els nombres com jo que només tenim xifres baixes puguem unir-nos amb els altres. Sense por. Sense desprestigi. Sense odi.

Ella li somrigué. No es podien ni imaginar que en pocs anys arribaria la informàtica i que els uns i els zeros tindrien una gran importància. Però això és una altra història.

Racó biogràfic

Leibniz: un poliedre de moltes cares

Eduard Recasens
Doctor en Ciències (Matemàtiques)

En aquesta segona part del «Racó biogràfic» dedicat a Leibniz, (per a la primera part vegeu la *SCM/Notícies* 39), es completa la seva biografia i es mostren algunes de les eines que va fer servir en la construcció del càlcul diferencial.

En la vida de Leibniz hi ha quatre etapes molt clares, cadascuna de les quals relacionades amb una ciutat. La primera ciutat és Leipzig i correspon a la seva infantesa i estudis universitaris (vegeu *SCM/Notícies* 39). La segona és Mainz, ciutat on s'inicia com a conseller i jurista al servei de la noblesa. La tercera és París, on Leibniz descobrirà la matemàtica més avançada i és en aquesta ciutat on concebrà i donarà forma al càlcul diferencial. La quarta i última ciutat és Hannover, una petita ciutat de Saxònia en la qual resideix oficialment

durant quaranta anys i presta els seus serveis a la família regent amb els càrrecs de conseller, bibliotecari i historiador; al mateix temps, desenvoluparà molts altres projectes propis.

Leipzig (1646–1667)

Leipzig, ciutat on Leibniz va néixer i va cursar els estudis de filosofia i dret. El grau de doctor en dret li atorgà la Universitat d'Altdorf el febrer del 1667; aquesta universitat li oferí un lloc com a docent però el va rebutjar, va preferir no quedar lligat a cap universitat, pensava que així tindria més llibertat per desenvolupar els seus propis projectes.

La formació matemàtica rebuda a l'etapa escolar va ser molt simple, aritmètica bàsica i alguna cosa dels *Elements* d'Euclides, però ell mateix va completar aquestes poques matemàtiques resolent problemes.

Allò que més caracteritza Leibniz al llarg de la seva vida és la seva constant recerca d'un principi unificador de tot el que passa al món, un principi que no podrà trobar dins la mateixa ciència i que haurà de buscar en el camp de la filosofia i la teologia. En el cas de la ciència es va proposar crear un llenguatge unificador, una llengua sense les ambigüitats del llenguatge ordinari, un llenguatge que construiria a partir d'un alfabet conceptual, en què les paraules, combinacions d'aquest alfabet, mostrarien amb evidència pictòrica les idees que representen.

Al llarg de la seva vida va intentar construir per diferents vies aquesta llengua científica que somniava però, malauradament, no ho va aconseguir. L'interès de Leibniz per aconseguir sòlides regles d'inferència en el terreny del coneixement es remunta als últims anys de l'escola bàsica, quan li van ensenyar els sil·logismes d'Aristòtil. Ell mateix va aprendre a argumentar sil·logísticament, i se servia d'aquesta tècnica per defensar les seves tesis. Allò que més admirava d'Aristòtil era que hagués aconseguit establir regles de deducció. Temps després va adonar-se que tot aquell sistema logístic es podia millorar si aconseguia dotar-lo d'unes regles de càlcul apropiades i, en aquest sentit, hi ha treballs de l'època de Hannover que són un clar antecedent de la lògica algebraica.

Per a la tesi d'habilitació a la Facultat de Filosofia de Leipzig va escriure sobre lògica del coneixement i aquest treball va ser la base d'un llibre de joventut, *Dissertació sobre l'art combinatori*, que es va publicar el 1666. El llibre, tot i que conté combinatòria, té un caràcter més lògic i filosòfic que no pas matemàtic. S'inspira en l'obra *Categories* d'Aristòtil i en el *Gran Art* de Ramon Llull. En aquest llibre Leibniz es proposa desenvolupar una lògica de la invenció enfront de la tradicional lògica de la deducció. Exposa com es podria obtenir nou coneixement a còpia de combinar conceptes simples i indescomponibles. Aquesta és la idea que troba al *Gran Art* de Llull, on l'insigne mallorquí utilitza un senzill mecanisme basat en rotacions de cercles concèntrics per fer les combinacions de conceptes bàsics, la idea de Leibniz va ser millorar Llull aplicant la combinatòria matemàtica.

Mainz (1667–1672)

La primera feina de Leibniz va consistir a exercir de secretari i consultor jurídic del baró Johann von Boineburg, que llavors residia a Frankfurt, però, poc després, tot i que va seguir al servei de Boineburg, va acceptar posar-se al servei de l'elector de Mainz, Joan Felip Schönborn, motiu pel qual va establir la seva residència en aquesta ciutat. Leibniz va ser anomenat jutge de l'Alt Tribunal d'Apel·lació.

En aquesta època va començar a interessar-se per la nova mecànica i les matemàtiques però Mainz no era el lloc més adient si hom volia estar al corrent d'aquestes disciplines i entrar en contacte amb els seus principals cultivadors. El lloc adient, el millor, era París.

Havia escrit *Hypothesis physica nova* sobre el moviment i el xoc de cossos, i encara que el llibre era anònim, Christian Huygens va saber qui era l'autor, li va dir Henry Oldenburg, el secretari de la Royal Society; aquesta institució va publicar una segona edició del llibre.

L'ocasió per visitar París es va presentar quan el rei de França, Lluís XIV, va requerir a l'elector de Mainz que deixés passar pel Rhin els seus vaixells per envair Holanda. Schönborn, preocupat per l'ànsia expansionista del rei francès, va demanar a Boineburg i Leibniz que intentessin desviar l'atenció de Luis XIV cap a una altra zona allunyada d'Europa. Aleshores se'ls va ocórrer proposar a Lluís XIV una incursió per terres egípcies i establir-hi una colònia francesa ja que la zona tenia gran valor estratègic i era clau per al comerç oriental.

París (1672–1676)

El març del 1672 Leibniz, amb gairebé 26 anys, arribava a París. Malauradament, França i Anglaterra havien declarat la guerra a Holanda, i, per tant, la missió de distracció del rei francès ja no tenia sentit. Anys més tard, Napoleó Bonaparte recolliria aquesta idea.

Una vegada a París, Leibniz va quedar-s'hi un temps més ocupant-se d'altres assumptes relacionats amb Boineburg mentre continuava treballant per a Schönborn. Quan el desembre del 1672 va morir Boineburg i pel volts de febrer del 1673 va morir l'elector de Mainz, la situació laboral de Leibniz es va complicar però va aconseguir continuar a París encarregant-se d'altres tasques relacionades amb els successors de tots dos. Amb tot, amb el pas del temps es van enrarir les relacions i cada vegada tenia menys encàrrecs i per tant menys recursos, fins que va arribar un punt en què es va veure obligat a deixar París per anar a Hannover a la recerca d'una nova feina.

Va arribar a París amb una màquina de calcular inventada per ell, la qual, a més de sumar i restar, això ja ho feia la de Blaise Pascal, multiplicava i dividia; tenia la intenció de mostrar-la a l'Acadèmia de Ciències de París. Així mateix, també volia donar a conèixer alguns resultats i mètodes de sumació de sèries dels quals creia que era el descobridor. Però no sabia que altres ja els havien trobat; malauradament, no estava al corrent dels avenços de la matemàtica.

C. Huygens era llavors a París ja que el ministre Colbert havia sol·licitat els seus serveis per organitzar l'Acadèmia Real de Ciències, fundada el 1666. Leibniz i Huygens es van trobar per primera vegada la tardor del 1672. En aquesta trobada, després que Leibniz li confessés que havia trobat un mètode de sumació de sèries infinites que ell creia que era molt important, Huygens el va voler posar a prova i li va demanar que trobés la suma dels inversos dels nombres triangulars, una suma que Huygens ja coneixia i que anys abans havia resolt Pietro Mengoli. Encara que Leibniz no fos el primer a trobar la suma d'aquesta sèrie, per a ell el procediment va resultar ben il·luminador ja que, segons Leibniz va explicar més tard en un llibret sobre l'origen del càlcul diferencial, el procediment de sumes i diferències aritmètiques consecutives que havia utilitzat per trobar la suma de la sèrie el va inspirar per descobrir la relació inversa entre diferenciació i integració (per a més detalls vegeu «Racó biogràfic», *SCM/Notícies* 39).

El gener del 1673, Leibniz va tenir ocasió de viatjar a Londres en una missió diplomàtica. Leibniz va ser invitat per Oldenburg a la reunió del dia 1 de febrer de la Societat per presentar el model de màquina de calcula. Malauradament la màquina no va funcionar del tot i Robert Hooke va trobar certs defectes en el mecanisme els quals va fer públics. En una altra ocasió en què va visitar al químic Robert Boyle es va trobar amb el matemàtic John Pell, que li va fer saber que alguns dels resultats sobre sèries que explicava com a propis ja els havia descobert François Regnauld. Malgrat que en general els matemàtics anglesos es van mostrar crítics i distants, Leibniz va fer amistat amb Oldenburg. En una altra de les reunions de la Royal Society, aquest va llegir una carta de René François de Sluse en la qual comunicava una regla per trobar les tangents a corbes expressades per equacions polinòmiques $p(x, y) = 0$. Aquest resultat tan valuós va ser àmpliament utilitzat per Leibniz en les seves investigacions del càlcul. També va llegir les «lliçons geomètriques» d'Isaac Barrow. Oldenburg va expressar-li el seu desig de tornar-lo a convidar quan hagués perfeccionat el mecanisme de la màquina de calcular. Més endavant, el 19 d'abril d'aquell any, Oldenburg va aconseguir que l'admetessin com a membre de la Royal Society.

De retorn a París, Leibniz es va reunir novament amb Huygens i en aquesta segona trobada Huygens li va regalar una còpia del llibre acabat de publicar *Horologium Oscillatorium*. L'obra tractava del moviment pendular i per llegir-lo calia conèixer diverses qüestions relacionades amb el centre de gravetat. Huygens, per tal que Leibniz es posés al dia sobre centres de gravetat, quadratures i altres moltes qüestions, li va recomanar que llegís René Descartes, Honoré Fabri, James Gregory, Blaise Pascal, Gregory de St. Vincent i John Wallis. A continuació, Leibniz, durant més d'un any, es va dedicar a la lectura i estudi de tots aquests brillants matemàtics i el resultat no es va fer esperar.

Segons el mateix Leibniz, va ser mentre llegia el «tractat dels sinus d'un quart de

cercle» de B. Pascal que es va fixar en l'ús d'un triangle infinitesimal especial que Pascal feia servir en el cas d'un cercle, aleshores va pensar que el triangle es podria fer servir per a les altres corbes; Leibniz l'anomenarà «triangle característic». Passo a descriure aquest triangle. Abans, però, cal recordar que Leibniz imaginava una corba com un polígon d'infinits costats infinitesimals i que les rectes tangents s'obtenien geomètricament perllongant els costats d'aquest polígon. Tinguem en compte que a l'època de Leibniz encara no es treballava amb el concepte de límit, ni tampoc hi havia el de nombre real.

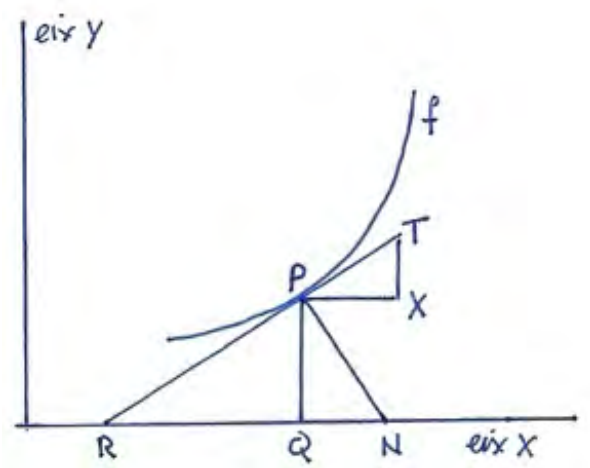

Figura 1

Consideris el triangle rectangle euclidià PXT associat a un punt P d'una corba f, (vegeu figura 1), format pel catet PX, el qual és un segment arbitrari paral·lel a l'eix d'abscisses X; el catet XT, on T és un punt de la tangent geomètrica en P, i la hipotenusa, que és el tros de recta tangent determinat pel punt P i el punt T. Llavors, el «triangle característic» en el punt P és un triangle rectangle semblant i igualment disposat que el triangle euclidià PXT, però en el cas del característic la hipotenusa és un arc infinitesimal de la corba f que s'identifica amb un segment infinitesimal de la recta tangent en P que, per Leibniz, és un costat del polígon d'infinits costats infinitesimals que és la corba. Els catets d'aquest triangle característic són les corresponents diferències d'abscisses i ordenades, que també són segments infinitesimals.

A partir de la tardor del 1675, Leibniz va introduir la notació d per indicar la diferència entre dos valors d'una variable, amb aquesta notació, ds representa l'arc infinitesimal de corba i dx, dy les diferències d'abscisses i ordenades corresponents. Amb aquesta notació, la semblança entre el triangle PXT i el triangle característic s'expressa per la relació de proporcionalitat següent entre costats corresponents:

$$\frac{ds}{PT} = \frac{dx}{PX} = \frac{dy}{XT}.$$

Una relació de proporcionalitat que s'ha d'entendre en la geometria ordinària ampliada amb les diferències infinitesimals de Leibniz.

Leibniz utilitzava el triangle característic per trobar relacions algebraiques entre elements diferencials. Vegem com troba el «mètode de transmutació», una de les fórmules que fa servir més per relacionar integrals i que és equivalent al «mètode d'integració per parts».

Considerem el trapezi mixtilini $ABCD$ de la figura 2, el qual està format per l'arc d'una corba $y(x)$ d'extrems els punts A i B, i els tres segments rectilinis AC, BD, CD.

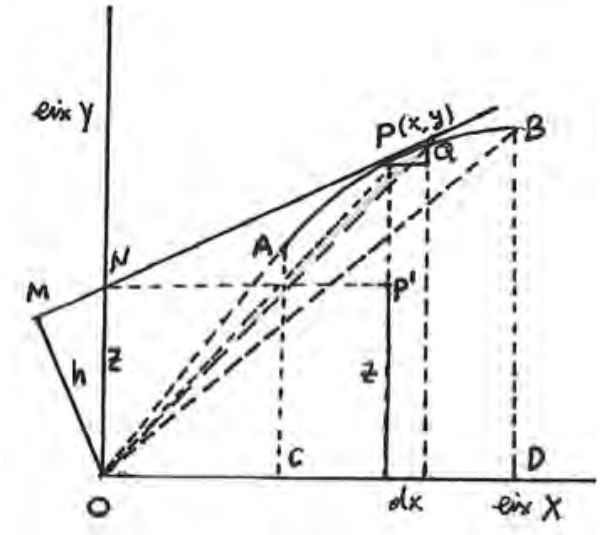

Figura 2

Seguint Leibniz, l'àrea d'aquest trapezi és la suma de les àrees dels infinits rectangles infinitesimals ydx que hi ha entre AC i BD.

$$\text{à}(ABCD) = \int ydx$$

(Leibniz no escrivia els límits d'integració com es fa ara.)

El teorema de transmutació relaciona l'àrea del trapezi mixtilini $ABCD$ amb l'àrea del triangle mixtilini format per l'arc de corba AB i els costats OA, OB.

Geomètricament aquesta relació és:

$$\text{à}(ABCD) = \text{à}(OAB) + [\,\text{à}(OBD) - \text{à}(OAC)]. \quad (*)$$

El sumand entre claudàtors és una diferència entre dos triangles rectilinis.

L'àrea del triangle mixtilini OAB és la suma infinita de les àrees dels triangles radiats des del punt O que tenen per base els costats del polígon infinitesimal entre els punts A i B. Cadascun d'aquests triangles infinitesimals té àrea $\frac{1}{2}hds$ i l'àrea del triangle mixtilini OAB és:

$$\text{à } (OAB) = \int \frac{1}{2}hds.$$

La semblança del triangle rectangle MNO amb el triangle PNP' i aquest amb el triangle característic, permet escriure la proporció

$$\frac{ds}{dx} = \frac{z}{h};$$

i d'aquí la relació diferencial següent:

$$hds = zdx,$$

i , per tant:

$$\int \frac{1}{2}hds = \int 12zdx.$$

Si escrivim la relació geomètrica d'àrees (*) utilitzant les expressions integrals obtingudes, resulta la igualtat (**):

$$\int ydx = \frac{1}{2}\int zdx + \left[\frac{1}{2}OD \cdot DB - \frac{1}{2}OC \cdot CA\right].$$

Aquesta última igualtat és el teorema de transmutació.

Observeu que el teorema de transmutació relaciona la integral d'una corba y-ordenada d'abscissa x amb la integral d'una corba z-ordenada d'abscissa x. Aquesta corba z s'obté geomètricament de la manera següent: la recta tangent en P talla l'eix d'ordenades en un punt N, llavors la paral·lela a l'eix d'abscisses per N talla l'ordenada de P en un punt P'. En recórrer P l'arc de corba entre A i B el punt P' recorre una certa corba que és la que anomenem «z». Aquesta $z(x)$ és la corba que apareix en el teorema de transmutació, i, observant la figura 2, es pot veure fàcilment que l'expressió analítica de la corba $z(x)$ és:

$$z = y - x\frac{dy}{dx}.$$

També va fer servir el triangle característic per resoldre aquells problemes que demanaven les corbes, les tangents o les normals de les quals complien certes condicions. Leibniz va trobar, per exemple, les corbes les subnormals de les quals són inversament proporcionals a les ordenades. Aquest va ser un dels primers exemples històrics de resolució d'una equació diferencial i d'aplicació del mètode de separació de variables. Ho va fer de la manera següent:

Si considerem el triangle rectangle PQN de la figura 1, en el qual la hipotenusa és el segment de normal PN i els catets són l'ordenada $PQ = y$ i la subnormal QN, aquest triangle PQN és semblant al triangle característic; per tant, es pot escriure la relació de proporcionalitat següent:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{QN}{y}.$$

La condició sobre les normals és:

$$QN = \frac{k}{y}$$

d'aquí resulta la igualtat diferencial

$$kdx = y^2dy,$$

de la qual, una vegada aplicat el procés de sumació leibnizià a cada costat:

$$\int kdx = \int y^2dx.$$

Resulta que són corbes cúbiques.

El matemàtic suís Jakob Bernoulli va ser qui va proposar a Leibniz la paraula *integració* com a substitutiva de la paraula sumació. L'emblemàtic signe d'integració, la S allargada de la paraula llatina summa, és de Leibniz,l'utilitzà per primera vegada en un manuscrit del 29 d'octubre de 1675, abans havia utilitzat el símbol Omn. de Cavalieri. En aquest mateix manuscrit va introduir la lletra d per expressar les diferències de les variables.

La resolució d'equacions diferencials era anomenada per Leibniz «mètode invers de les tangents». Amb aquest mètode va poder resoldre problemes que continuaven oberts des de feia temps, per exemple, el problema que Florimond de Beaune havia plantejat a Descartes, en el qual es demanava quines eren aquelles corbes la subtangent de les quals tenien un valor a constant. La semblança del triangle característic amb el triangle rectangle PRQ (vegeu figura 1), d'hipotenusa el segment de recta tangent PR, i catets PQ, RQ, sent PQ igual a l'ordenada y del punt P i RQ la

subtangent de valor constant a, permet escriure la proporció:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a}{y}.$$

De la qual, aplicant el mètode de separació de variables, Leibniz conclou que la variable x depèn logarítmicament de la variable y.

Tots aquests resultats i molts d'altres mostraven a Leibniz la potència del mètode de càlcul que havia creat, malauradament, aquells profitosos anys de París s'acostaven al final. Una molt debilitada situació econòmica, com a conseqüència dels pocs lligams que tenia amb Mainz i atès que no aconseguia obtenir una plaça remunerada a l'Acadèmia de Ciències, ni tampoc la càtedra que havia deixat vacant Robert Roberval, van fer que acabés acceptant el treball que li oferia el duc regent Johann Friedrich a Hannover com a conseller i bibliotecari. Leibniz havia donat la seva conformitat el gener del 1676 però va ajornar la seva marxa tant com va poder, no va deixar París fins l'octubre i tampoc no hi va anar directament sinó que primer va passar per Londres i després per Holanda. Arribava a Hannover cap a finals de desembre.

Havia passat a París quatre anys i mig i havia valgut la pena, Leibniz havia arribat a la capital francesa amb escassos coneixements de matemàtica superior i marxava d'aquella ciutat no tan sols coneixent la matemàtica més avançada sinó que ell mateix havia col·laborat notablement al seu progrés creant el càlcul diferencial directe i invers. Durant els anys de Hannover continuaria amb el càlcul diferencial i també estudiaria altres branques de la matemàtica però ja no seria el mateix, una multitud de tasques que no tenien a veure amb les matemàtiques l'esperaven.

Leibniz va passar per Londres abans d'anar a Hannover per lliurar a Oldenburg el model perfeccionat de la seva màquina de calcular, havia fet una presentació del nou model a l'Acadèmia de Ciències de París i havia estat un èxit, però hi havia un altre motiu més important, ja feia temps que Leibniz havia comunicat a Oldenburg alguns resultats del seu càlcul i aquest li havia contestat que allò que li explicava ja ho havien trobat Newton i Gregory. Havent demanat a Oldenburg més informació sobre què havien fet, la resposta només contenia desenvolupaments en sèrie de potències, del sinus, de l'arcsinus, de la tangent, de l'arctangent, i algunes quadratures, però no hi havia cap explicació de com s'havien obtingut. Leibniz va decidir visitar John Collins, matemàtic que tenia al seu càrrec la biblioteca de la Royal Society, per demanar-li més informació sobre el mètode dels desenvolupaments en sèrie. Collins li va mostrar, sense que Newton ho sabés, un esborrany del llibre *De Analysi* on hi havia tots els continguts que feien referència als desenvolupaments en sèrie, Newton ho havia escrit el 1669 però el llibre no es va publicar fins al 1711. Més endavant, Leibniz va demanar a Oldenburg més detalls sobre els mètodes de Newton i va ser en aquell moment en què Newton va decidir respondre. En una primera carta (13 juny de 1676) li tornava a presentar alguns resultats sobre sèries però sense cap demostració; Leibniz li va respondre (17 agost 1676) i va continuar preguntant sobre el mètode de càlcul. Newton, en una segona carta (24 octubre 1676), li va parlar de fluxions d'una manera totalment incomprensible per mitjà de dos anagrames. El primer deia així: «6accdae13eff7i3l9n4o4qrr4s8t12vx». El segon era més llarg: «5accdae10effh12i4l3m10n6oqqr7s11t9v3x:11ab3cdd10eaeg10ill4mtn6033q6r5s11t8vx,3acae4egh5i414m5n8oq4r3s6t4vaaddaeeeeeiijmmnnoprrrsssssttuu».

Amb aquesta informació tan explícita Newton donava per començada i acabada la seva explicació a Leibniz del seu mètode de fluxions. Al cap de disset anys, John Wallis va fer públiques les explicacions dels anagrames en el segon volum de la seva *Opera mathematica* publicada el 1693.

Les dues cartes de Newton més el fet que Leibniz havia llegit el *De Analysi* en el seu segon viatge a Londres van ser utilitzades reiteradament per aquells que anys més tard l'acusarien d'haver plagiat el càlcul de Newton.

La segona estada de Leibniz a Londres va durar uns deu dies, després va marxar cap a Holanda. A Amsterdam va visitar el matemàtic Jan Hudde, a l'Haia va debatre amb Baruch Espinoza sobre ètica i teologia i a Delft, Anton van Leeuwenhock li mostrà el món dels mi-

croorganismes a través del microscopi. Leibniz, després d'haver creat el món de les diferències infinitesimals, el va entusiasmar aquella mostra d'un món viu amb éssers tan diminuts, uns éssers que no es podien veure a simple vista però que exercien una gran influència en el món visible.

Hannover (1676–1716)

Leibniz arribà finalment a Hannover a finals de desembre del 1676. S'obriria un llarg període de quaranta anys en el qual Leibniz posaria al descobert una gran capacitat de treball exercint al mateix temps una gran quantitat de tasques ben diverses. En aquests anys, va servir a un total de tres governants de Hannover: Johann Friedrich, Ernst August i George Ludwig.

Johann Friedrich 1676–1679

El primer, el duc Johann Friedrich, va ser un home que va trobar en Leibniz la persona ideal per compartir les seves inquietuds culturals i científiques. El va nomenar conseller privat, circumstància que li va suposar tenir un bon salari i un rang elevat a la cort.

Leibniz va proposar al duc un nou sistema de classificació de llibres i documents i l'adquisició de nous volums per posar la biblioteca al dia dels nous corrents científics i filosòfics.

Com a conseller va presentar diverses propostes a Johann Friedrich, reformes en l'administració pública, diversos plans agrícoles, la creació d'una acadèmia de comerç i idiomes, la creació d'una oficina d'informació pública, creació de plans de pensions per a viudes i orfes, etcètera. El projecte més ambiciós consistia a millorar el sistema de drenatge de les mines de la regió del Harz, de les quals s'obtenia coure, ferro, plom i plata, i proposava la utilització de molins de vent que ell havia inventat.

Leibniz estava convençut que amb aquest projecte de les mines s'obtindrien molts diners i que n'hi hauria prou per poder finançar una acadèmia de les ciències dels països germànics, un lloc per estar al dia dels nous corrents científics i fer recerca de primera línia. En concret, pensava que en el si d'aquesta acadèmia podria formar un equip d'investigació per portar a cap el seu projecte somiat de crear una llengua universal. Aquest nou llenguatge s'havia de construir a partir d'un alfabet conceptual, els signes del qual havien de ser transmissors d'idees bàsiques. Les paraules no havien de ser una combinació de signes sense significat propi, com passa en el llenguatge ordinari, sinó que les paraules eren com un dibuix del concepte que representaven i, a més, havia de ser un llenguatge operatiu tal com ho és l'àlgebra per a les matemàtiques. Leibniz l'anomenava «característica universal», i, en el seu somni, amb aquest llenguatge es podria dirimir qualsevol conflicte simplement «calculant». Leibniz va veure en el llenguatge xinès un precedent d'allò que ell pensava, i per això es va mostrar molt interessat per la cultura xinesa i va buscar vies de contacte amb la Xina.

Ernst August 1679–1698

Johann Friedrich va morir el 1679 i el succeí el seu germà Ernst August, un home d'Estat que li importaven ben poc les inquietuds filosòfiques i científiques de Leibniz. No obstant això, va mantenir-hi bones relacions.

El 1680 Ernst August va donar llum verda al projecte de les mines, però el projecte només va durar cinc anys. El 1685 es va cancel·lar ja que requeria molta inversió i no donava els guanys esperats sinó pèrdues; d'altra banda, els miners hi estaven en contra, veien en Leibniz un intrús. Els molins havien estat ben dissenyats i ben construïts, però a l'hora de la veritat no feia prou vent, Leibniz no havia tingut en compte la meteorologia local.

Amb el cessament del projecte, la iniciativa d'una acadèmia de les ciències també va quedar suspesa i, de retruc, tampoc no es va poder formar un equip per treballar el projecte de llengua universal. Leibniz, però, va seguir treballant-hi, com ho confirmen els diferents manuscrits que s'han trobat amb diversos intents de formulació d'aquesta llengua.

Quan Ernst August va succeir el seu germà, Leibniz, a fi d'assegurar-se el lloc de treball, li va presentar un memoràndum amb una gran quantitat de projectes, entre els quals hi havia una proposta per redactar la història de la família Brunswick; es volia demostrar el parentesc amb determinades famílies nobles (Güelf i Este) perquè Hannover fos declarat un electorat. Leibniz sabia que per dur a terme aquest estudi genealògic hauria de visitar diverses biblioteques i seria un bon motiu per deixar Hannover algunes temporades i podria atendre

els seus propis projectes. D'aquesta manera Leibniz va poder viatjar pel sud d'Alemanya, per Àustria i per Itàlia.

Durant el període d'Ernst August, Leibniz va continuar treballant el càlcul diferencial i altres temes matemàtics. En aquests últims va fer contribucions originals però que no van tenir gaire ressò en el seu temps, com ara:

- Introduí determinants i anticipà la regla de Cramer per als sistemes lineals.
- Proposà diversos camins per algebritzar la lògica tradicional.
- Introduí el sistema binari de representació dels nombres i la seva aritmètica.
- Proposà una nova edificació i una nova manera de tractar la geometria la qual anomenà «Analysi Situs».

També treballà en estadística i probabilitat, que aplicà a diversos jocs i a la jurisprudència.

Pel que fa al càlcul, Leibniz va ser el primer a publicar sobre el càlcul diferencial. Va escriure un article que va ser publicat a la revista *Acta Eruditorum* en el número d'octubre del 1684 (Newton no publicaria sobre fluxions fins al 1704, ho va fer en un apèndix al seu llibre d'òptica). El títol de l'article de Leibniz és «Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus», un títol llarg en què es diu que presenta un nou mètode per trobar màxims i mínims i també tangents, encara que les expressions siguin fraccionàries o irracionals sense que hi hagi necessitat de distingir-les.

Un article força enrevessat del qual Johann Bernoulli va assegurar que semblava més un enigma que no pas una explicació. Leibniz comença l'article donant la definició de diferencial d'una variable i, el que més sorprèn és que, llevat del llenguatge geomètric que fa servir, la definició que dona és exactament la que es fa servir avui.

De manera abreujada, allò que diu és el següent: si es considera un punt $P(x, y)$ d'una corba $y(x)$ i *subt* és el segment subtangent de la corba en aquest punt P, llavors, donat un segment dx arbitrari, dy és aquell segment que compleix la proporció:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{subt}.$$

Després d'haver donat aquesta definició, Leibniz presenta les regles algebraiques que regeixen el comportament de les diferencials: diferencial d'una suma, d'un producte, d'un quocient, etcètera, i, entre altres consideracions, estableix les condicions $dy = 0$ per a màxims o mínims i $ddy = 0$ per a punts d'inflexió. Acaba l'article amb la resolució del problema que Florimond de Beaune havia plantejat a Descartes i que aquest no havia pogut resoldre (vegeu pàgina 87 d'aquest «Racó biogràfic»).

Acta Eruditorum era una revista científica amb periodicitat mensual, fundada a Leipzig el 1682, que volia ser per als estats germànics allò que el *Journal de Sçavans* era per als francesos o el *Philosophical Transactions* per als britànics. Leibniz en va ser fundador a partir de la proposta que li va fer el professor Otto Mencke, de la Universitat de Leipzig. Molts dels articles de Leibniz es van publicar en aquesta revista. Ja el primer número contenia un article de Leibniz sobre la quadratura aritmètica del cercle que ell havia descobert el 1673 a París.En el número següent va escriure un article en el qual presentava una deducció matemàtica de les lleis de l'òptica fent servir el principi segons el qual la llum viatja seguint la trajectòria de mínima resistència; després d'aquests dos primers articles en van seguir molts altres.

Els matemàtics suïssos Jakob i Johann Bernouilli van ser els primers i principals divulgadors del càlcul diferencial, que utilitzaven principalment per resoldre problemes de la física relacionats amb corbes mecàniques. Per exemple, entre d'altres, van trobar la forma que adoptava una corda flexible i homogènia quan només es fixava pels extrems i sobre aquesta només hi actuava la gravetat.

Anys després, el 1696, el marquès Guillaume de l'Hôpital, a partir d'unes classes que particularment li havia fet Johann Bernoulli, va publicar el primer llibre de text sobre càlcul diferencial: *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes.*

En aquests anys, una manera de mostrar a la comunitat matemàtica la potència del càlcul diferencial va ser la de proposar, a través de les revistes com *Acta Eruditorum*,

problemes que difícilment es podien resoldre sense utilitzar-lo. El juny del 1696 Johann Bernoulli va proposar buscar quina era la corba per la qual un cos sotmès només a la gravetat baixava en el menor temps possible entre dos punts que no estaven ni en posició horitzontal ni en posició vertical. Es van rebre quatre solucions a *Acta Eruditorum*: la de l'Hôpital, la de JakobBernoulli, la de Johann Bernoulli i la de Leibniz, però hi va haver una cinquena solució que va ser presentada al *Philosophical Transactions*, a càrrec de Newton. Llevat de la de l'Hôpital, totes les altres solucions eren correctes: es tractava de la corba cicloide.

George Ludwig 1698–1716

Ernst August va morir l'any 1698 i el va succeir el seu fill primogènit George Ludwig. Ludwig es va mostrar sempre en desacord amb les maneres de fer de Leibniz, el neguitejava no saber mai què feia ni on era, més tenint en compte que encara no havia presentat res per escrit sobre la història de la seva família. Fins al punt que va decidir prohibir-li que s'absentés de Hannover sense el seu permís escrit, però Leibniz sempre trobava motius i maneres per absentar-se llargues temporades, ja fos per anar a l'Acadèmia de Ciències de Berlín, de la qual va ser fundador i el primer president des del 1700, o bé per anar al palau de Charlottenburg (Berlín) per trobar-se amb Sofia Carlota, germana de George Ludwig i esposa de l'elector de Brandenburg, i parlar de filosofia i teologia, o per anar a Wolfenbüttel i atendre assumptes de la biblioteca de la qual era responsable, o per viatjar Viena com a conseller de l'emperador del Sacre Imperi, o per anar a trobar-se amb el tsar Pere el Gran, que li va demanar consell per crear una acadèmia, i un llarg etcètera d'activitats i assumptes de tota mena.

Tot i les seves múltiples ocupacions Leibniz no desatenia els assumptes de la Casa de Hannover, havia aconseguit que el ducat de Hannover fos declarat un electorat del Sacre Imperi, i, el 1701 va fer possible que es reconeguessin els drets successoris de la família Brunswick a la Corona anglesa en el cas de mort sense descendència; i això és el que va passar l'any 1714. George Ludwig de Hannover va ser coronat rei d'Anglaterra amb el nom de George I. Això va fer pensar a Leibniz que podria canviar la ciutat provinciana de Hannover per Londres; estava convençut que el rei, en agraïment a les gestions que havia fet perquè tot anés rodat, li oferiria la possibilitat de formar part del seu seguici. Però no va passar res d'això, George Ludwig el continuava menystenint, i va ordenar a Leibniz que es quedés a Hannover i acabés d'una vegada la història de la família Brunswick. Leibniz va escriure'n dos volums però no va aconseguir acabar-la.

Aquests últims anys a Hannover van ser d'una gran soledat, Leibniz no s'havia casat però havia mantingut una gran activitat social. Durant aquests quaranta anys s'havia relacionat amb les elits del món intel·lectual i polític europeu, com queda ben palès en els milers de cartes que ens ha deixat. Ara, però, semblava que tot li anava en contra. D'una banda, li faltaven les seves principals confidents, Sofia Carlota, que havia mort el 1705 d'una pneumònia, i la mare d'aquesta, la princesa Sofia, que va morir el 1714. D'altra banda, es van incrementar els atacs de gota que ja patia des de feia uns anys i que el deixaven immòbil. Per a més inri, aquests últims anys van ser els pitjors pel que feia a la polèmica sobre la prioritat en la creació del càlcul. La història d'aquesta polèmica és llarga i subtil i no es pot relatar en un breu espai com aquest, només escriuré quatre línies sobre com va acabar; per a un relat detallat vegeu Durán (2006). L'enduriment de la confrontació s'inicià el 1708 quan John Keill, matemàtic britànic de la Universitat d'Oxford, en una comunicació al *Philosophical Transactions*, va acusar Leibniz d'haver plagiat Newton. Leibniz va demanar a la Royal Society que intervingués en aquest assumpte i l'entitat, que en aquells moments estava presidida per Newton, va decidir constituir una comissió de sis membres perquè jutgessin el fet i donessin el seu veredicte. El dictamen final va establir que Newton havia estat el primer inventor del càlcul i que el mètode diferencial i el de fluxions eren una mateixa cosa amb noms i notacions diferents. Allò que no es deia enlloc és que, si bé Newton havia precedit Leibniz en uns deu anys, aquest últim havia estat el primer a publicar els resultats. Amb el nom de *Commercium Epistolicum*, el 1712, es va editar un volum amb el dictamen i els documents que la comissió havia fet servir,

però va tenir una distribució molt reduïda. Leibniz, per exemple, es va assabentar de la seva existència a través de Johann Bernoulli, que n'havia rebut una còpia d'un nebot que havia estata París. Leibniz va contestar el *Commercium Epistolicum* mitjançant la *Charta Volans*, una carta anònima, que va ser distribuïda pel continent i que es va publicar a *Acta Eruditorum*, en la qual Newton era acusat d'haver plagiat Leibniz després que aquest últim li hagués comentat el seu mètode diferencial a les cartes de resposta a aquelles cartes encriptades que Newton li havia enviat el 1676 en què es parlava del mètode de les fluxions. Newton, enfurismat, va contestar la *Charta Volans* escrivint un llarg relat de com, segons ell, havia anat tot l'assumpte de la creació del càlcul, relat que va inserir en una ressenya que va escriure del *Commercium Epistolicum* i es va publicar al *Philosophical Transactions* del 1715. En aquell moment Leibniz va decidir escriure com havia anat la creació del càlcul diferencial, en la *Historia et origo calculi differentialis*, que no es va publicar fins molts anys després de la seva mort, que va tenir lloc el mateix any 1716, en què escrivia la història i l'origen del càlcul diferencial.

La polèmica va continuar al llarg del segle XVIII i durant aquest segle la societat matemàtica va quedar dividida irremeiablement entre britànics seguidors del càlcul fluxional i continentals seguidors del càlcul diferencial.

Leibniz va morir el 13 de novembre de 1716, tenia 70 anys. A l'enterrament no hi va assistir cap representant de la cort.

Deixava escrits molts articles sobre tota mena de temes, molts manuscrits, nombrosos esborranys i alguns llibres i, a més, una quantitat aclaparadora de cartes (unes deu mil); a banda, hi havia les cartes rebudes (deu mil més). Un llegat que encara avui s'estudia.

Referències

[1] J. Aiton. «Leibniz. Una biografía» (1985), Alianza Editorial.

[2] A.J. Durán. «La polémica sobre la invención del cálculo infinitesimal». (2006), Ed. Crítica.

[3] C.H. Edwards. *The Historical Development Of The Calculus*. Springer-Verlag (1979).

Problemes

Carles Romero, Juanjo Rué
IES Manuel Blancafort, la Garriga, UPC

Teniu a les mans una nova sessió de problemes de la *SCM/Notícies*, aquest cop amb alguns canvis, començant amb una edició a quatre mans de la secció.

Carles Romero: Efectivament, la vida segueix, però els actors van canviant. Aquestes ratlles són, en primer lloc, per donar la benvinguda a Juanjo Rué, responsable d'aquesta secció de problemes de la *SCM/Notícies* a partir d'ara mateix. I, després, per acomiadar-me d'aquesta feina, que va traspassar-me Pelegrí Viader, ara fa disset anys i 25 números de la revista!
Ara, doncs, toca mostrar el meu agraïment a tots els que hi heu contribuït, sigui amb propostes de problemes, sigui amb solucions i, també, a la Societat Catalana de Matemàtiques, que m'ha proporcionat els mitjans i la satisfacció de poder portar a terme aquesta tasca.
Gràcies a tothom!

Juanjo Rué: Primer de tot, agrair a en Carles i a l'equip editorial de la *SCM/Notícies*, tant el pas del testimoni com la confiança mostrada. En tot cas, espero poder fer, ni que sigui, la meitat de bona feina que en Carles ha estat fent durant tantes i tantes edicions de la revista, tot encarregant-se de tants i tants problemes que ens han entretingut molt en els últims anys.